| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: 1/3 |
|---|---|---|
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: |
| Postcode en | | Datum: |
| Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: |

I

99

10

Prima werk!

1. $D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2$ , $D\delta = \delta'' + \delta' - 2\delta$

Gezocht een $E \in D'_+$ z.d. $DE = D(\delta * E) = D\delta * E = \delta$ (1)

We zoeken dus de inverse van $D\delta$ in $D'_+$. Hiervoor gebruik ik "dat isomorfisme" om het probleem te transformeren naar het lichaam van rationale functies met coefficienten in $\mathbb{C}$: $Q(\mathbb{C}[X])$. Daarin ziet (1) eruit als

$$(s^2 + s - 2)E' = (s+2)(s-1)E' = 1$$

$$\Leftrightarrow E' = \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(s-1) + B(s+2) = (A+B)s + (2B-A)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -A + 2B = 1 \; + \\ \hline 3B = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$E' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Dus $E = \frac{1}{3}(Ye^x - Ye^{-2x})$

2. $DT = D\delta * T = Y \Leftrightarrow T = (D\delta)^{-1} * Y = E * Y$

We bepalen $T = E * Y$ door een uitstapje naar $Q(\mathbb{C}[X])$.

$$T' = E' \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s}$$

Dus $T = \frac{1}{3}Ye^x + \frac{1}{6}Ye^{-2x} - \frac{1}{2}Y$

3. Vergelijking in termen van distributies uit $D'_+$:

$$DYf = Yg \quad , \quad f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = 1$$

$$\begin{array}{llll} -2 \cdot Yf & = -2Yf & & = -2 \cdot Yf \\ (Yf)' & = Yf' + f(0)\delta & & = Yf' \\ (Yf)'' & = Yf'' + f'(0)\delta + f(0)\delta' & & = Yf'' + f'(0)\delta \; + \\ \hline \end{array}$$

$$DYf = YDf + \delta$$

$$Yf = E * Yg + E * \delta = E * Yg + E$$

$x>0$: $f = \int_0^x g(x-y) \cdot \frac{1}{3}(e^y - e^{-2y})dy + \frac{1}{3}(e^x - e^{-2x})$

Dit is tevens de oplossing voor $x \leq 0$, zoals blijkt door in te vullen of door een analoge berekening in $D'_-$ uit te voeren.

4 $f = \frac{1}{3}\int_0^x (e^y - e^{-2y})\,dy + \frac{1}{3}(e^x - e^{-2x}) = \frac{1}{3}\left[e^y + \frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^x + \frac{1}{3}(e^x - e^{-2x})$

$= \frac{1}{3}\left[e^x + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}\right] + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$

$= \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{1}{2}$ ✓

5 $\int_0^x f(x-y)(e^y - e^{-2y})\,du = G(x) \quad , x \geq 0$

Voorwaarden: $G \in C^2 \wedge G(0) = 0 \wedge G'(0) = 0$

In termen van distributies in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:

$(Ye^x - Ye^{-2x}) * Yf = YG$

$3E * Yf = YG$

$3E$ heeft inverse $\frac{1}{3}D\delta$ in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Dus:

$Yf = (\frac{1}{3}D\delta * 3E) * Yf = \frac{1}{3}D\delta * YG = \frac{1}{3}D(YG)$

$-2\,YG = -2YG$

$(YG)' = YG' + G(0)\delta$

$(YG)'' = YG'' + G'(0)\delta + G(0)\delta'$ +

$D(YG) = YDG + (G(0) + G'(0))\delta + G(0)\delta'$

Maar aangezien $G(0) = 0 = G'(0)$ "wordt dit klassiek".

$Yf = \frac{1}{3}YDG = Y\frac{1}{3}DG$

Op $x \geq 0$: $f = \frac{1}{3}(G'' + G' - 2G)$. ✓

Prima!

| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: 2 |
| --- | --- | --- |
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: |
| Postcode en | | Datum: |
| Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: |

$n \in \mathbb{N}$ , $T, T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

II

1. $T = \lim_{n\to\infty} T_n \iff \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \;\forall\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. Gegeven $T_n \to T \iff \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \;\forall\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Maar dan $\lim_{n\to\infty} \langle T_n', \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} -\langle T_n, \varphi'\rangle$

$= -\langle T, \varphi'\rangle$ want $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$= \langle T', \varphi\rangle$.

Dus $T_n \to T \implies T_n' \to T'$

3. Beschouw de functie $f: x \mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dus $f$ is zeker continu differentieerbaar. Verder is $f$ begrensd en heeft compacte drager dus $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx < \infty$. Bovendien is $f(x) \geq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$. Noem $\hat{f} := \frac{1}{I} f(x)$. ✓ Dan convergeert $\hat{f}_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\hat{f}(x/\varepsilon)$ naar $\delta$ als $\varepsilon \to 0$ ✓ (In de zin van distributies uiteraard.) In het bijzonder convergeert de "deelrij" $(\hat{f}_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ (Ik schrijf "deelrij" omdat $f_\varepsilon$ geen echte rij is.) ✓

4. Bij 2. zagen we dat de afbeelding $\frac{d}{dx}: T \to T'$ continu is. Dus $T_n \to T \implies T_n' \to T'$. Aangezien de $\hat{f}_{1/n}$ continu differentieerbaar zijn kunnen we de bijbehorende distributies differentiëren (nl. klassiek via $(T_f)' = T_{f'}$.) en volgt dus dat de rij $((\hat{f}_{1/n})')_{n\in\mathbb{N}}$ naar $\delta'$ convergeert.

✓

III 1. Een getemperde distributie $T$ is een lineaire afbeelding
$$T : S \to \mathbb{C}$$
zodanig dat $\varphi_n \xrightarrow[S]{} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.
Hierbij is $S$ de Schwarzruimte en bedoel ik met $\varphi_n \xrightarrow[S]{} \varphi$ dat $\varphi_n$ naar $\varphi$ convergeert in de zin van $S$. (Dus $\varphi_n \xrightarrow[S]{} 0 \Leftrightarrow \|x^p \varphi_n^{(q)}\|_\infty \to 0$ $\forall p, q \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$)

De Fourier getransformeerde van een getemperde distributie $T$ is de nieuwe getemperde distributie $\mathcal{F}T$ zodanig dat
$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in S$$
Waarbij $\mathcal{F}\varphi$ de gewone Fouriertransformatie van een functie is.

✓

2. $\mathcal{F}(T') = 2\pi i x \mathcal{F}(T)$ ✓ Zie blad 3.
$\mathcal{F}(2\pi i x T) = (-\mathcal{F}(T))'$ ✓
~~$\langle \mathcal{F}T', \varphi\rangle = \langle T', \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, (\mathcal{F}\varphi)'\rangle = \langle T, 2\pi i x \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle$~~

3 Voor een even getemperde distributie $T$ geldt dat
$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle \quad \forall \varphi \in S$$ ✓

~~Aangezien $\int e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx$ even is als $f(x)$ even en ook $\int e^{2\pi i x y} f(x)\,dx$ even is als $f(x)$ even zien we dat~~

Als $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx$ dan
$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x y} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x(-y)} f(x)\,dx = \hat{f}(-y)$$
en vice versa. Dus $\mathcal{F}\check{f} = (\mathcal{F}f)^\vee$.
Maar als $T$ dan even is, dan: $\forall \varphi \in S$
$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, (\mathcal{F}\varphi)^\vee\rangle = \langle T, \mathcal{F}\check{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}T, \check{\varphi}\rangle$$ ✓
Voor een oneven getemperde distributie $T$ geldt dat
$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, -\check{\varphi}\rangle \quad \forall \varphi \in S.$$
Maar dan:
$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, -(\mathcal{F}\varphi)^\vee\rangle = \langle T, -\mathcal{F}\check{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}T, -\check{\varphi}\rangle \quad \forall \varphi \in S$$
dus dan is $\mathcal{F}T$ ook oneven.

✓

| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: 3/3 |
|---|---|---|
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: |
| Postcode en | | Datum: |
| Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: |

4 ( $S \in S'$ want de functie is locaal integreerbaar en $\|x^f\|_\infty < \infty$ op alle compacte verzamelingen. )

$S = \text{signum}\, x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ (In de zin van distributies)

$\langle FS, \varphi \rangle = \langle S, F\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{0} -F\varphi\, dx + \int_0^\infty F\varphi\, dx$

$= \int_0^\infty -F\check{\varphi}\, dx + \int_0^\infty F\varphi\, dx = \int_0^\infty F(\varphi - \check{\varphi})\, dx$

Ik bepaal de Fourier getransformeerde van $Y$. Gegeven is dat $Y' = \delta$

$F(\delta) = F(\delta * \delta) = F(\delta) \cdot F(\delta) = 1 \quad (F(\delta) \neq 0)$

$F(Y') = 2\pi i x F(Y) = 1$ Aangezien $Y + \check{Y} = 1$ is

$F(Y) = \frac{1}{2\pi i} \cdot hw \frac{1}{x} + c\delta$ $\quad F(Y + \check{Y}) = \delta$

$F(\check{Y}) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot hw \frac{1}{x} + c\delta$

+

$\Rightarrow F(Y) = \frac{1}{2\pi i} hw \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\delta$

Aangezien $\text{signum}(x) = Y - \check{Y}$ is $F(\text{signum}(x)) =$

$F(Y - \check{Y}) = F(Y) - F(\check{Y}) = \frac{1}{\pi i} \cdot hw \frac{1}{x}$

III (vervolg) 2 $T \in S'(\mathbb{R})$ $\langle \mathcal{F}T', \varphi \rangle = \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}\varphi)' \rangle$

$$(\mathcal{F}(\varphi))' = \left[\int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x y} \varphi(x)\, dx\right]' = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x y} \cdot (-2\pi i x) \varphi(x)\, dx$$

$\varphi \in S$

$$= \mathcal{F}(-2\pi i x \varphi(x))$$

$$\langle \mathcal{F}T', \varphi \rangle = -\langle T, \mathcal{F}(2\pi i x \varphi(x)) \rangle = \langle \mathcal{F}T, 2\pi i x \varphi(x) \rangle =$$

$$\langle 2\pi i x \mathcal{F}T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S$$

Dus $\mathcal{F}T' = 2\pi i x \mathcal{F}T$ ✓

$$\langle \mathcal{F}(2\pi i x T), \varphi \rangle = \langle 2\pi i x T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, 2\pi i x \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$2\pi i x \mathcal{F}\varphi = 2\pi i x \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x y} \varphi(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-2\pi i x y} \varphi(y)\, dy =$$

$$= -\left[\overbrace{e^{-2\pi i x y} \varphi(y)\Big|_{\mathbb{R}}}^{0} - \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} \varphi'(y)\, dy\right]$$

gaat in de grenzen naar nul.

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} \varphi'(y)\, dy = \mathcal{F}(\varphi')$$

$$\langle \mathcal{F}(2\pi i x T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi' \rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi' \rangle = -\langle (\mathcal{F}T)', \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S$$

III 5 Als $\hat{T} = \mathcal{F}T$, dan is $T = \overline{\mathcal{F}}\hat{T}$. Hierbij is $\overline{\mathcal{F}}$ de toegevoegde Fouriertransformatie op $S'$, gedefinieerd door $\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S$. Hierbij is $\overline{\mathcal{F}}\varphi$ de gewone toegevoegde Fouriertransformatie van functies.

Bekend is (van III 4) dat $\mathcal{F}(\text{signum}(x)) = \frac{1}{\pi i} \text{hw} \frac{1}{x}$

dus $\text{hw}\frac{1}{x} = \mathcal{F}(\pi i \cdot \text{signum}(x))$. (Deze is oneven, want het is de afgeleide van de even distributie $\log|x|$).

~~$\langle \mathcal{F} \text{hw} \langle \mathcal{F} \text{hw}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{hw}\frac{1}{x}, \mathcal{F}\varphi \rangle$~~

~~Aangezien $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T$~~

Omdat $\text{hw}\frac{1}{x}$ oneven is krijgt de Fouriergetransformeerde een extra mintekenen.

$$\mathcal{F}\,\text{hw}\frac{1}{x} = -\pi i \cdot \text{signum}(x) \checkmark$$